Kurseinheit Polyeder

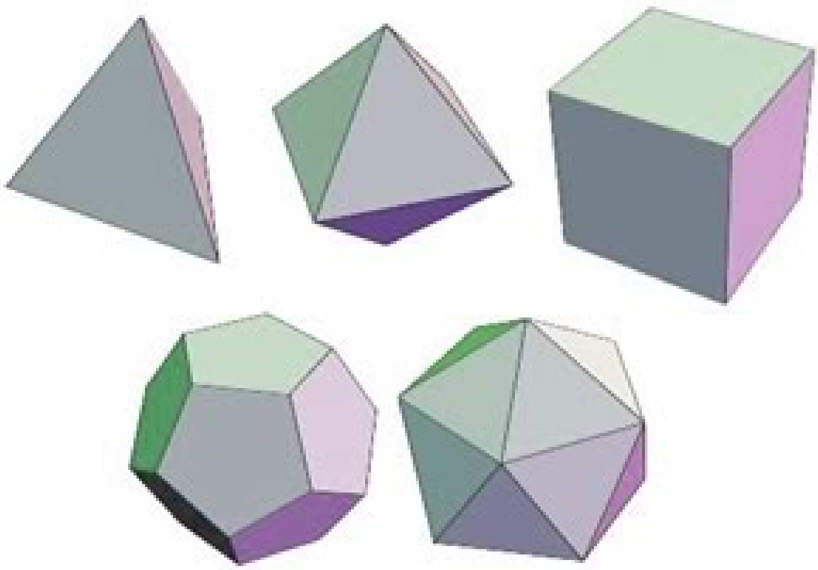
Arbeitsheft

Polyeder

= durch ebene Flächen begrenzte, räumliche Körper

B Platonische Körper

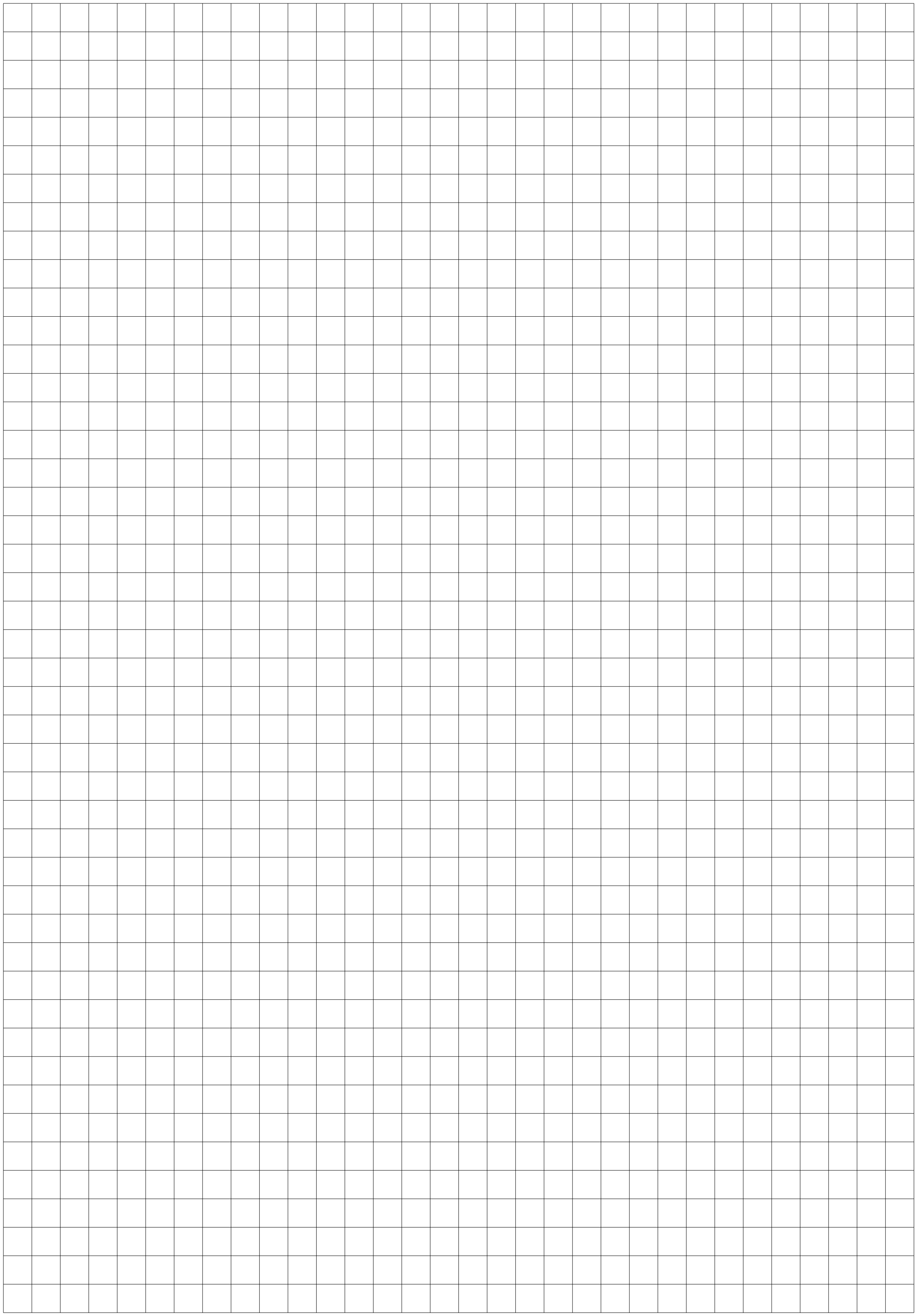
(= konvexe Körper, deren Begrenzungsflächen kongruente, regelmäßige n-Ecke sind und an deren Ecken stets gleich viele Flächen zusammenstoßen.)



MERKE

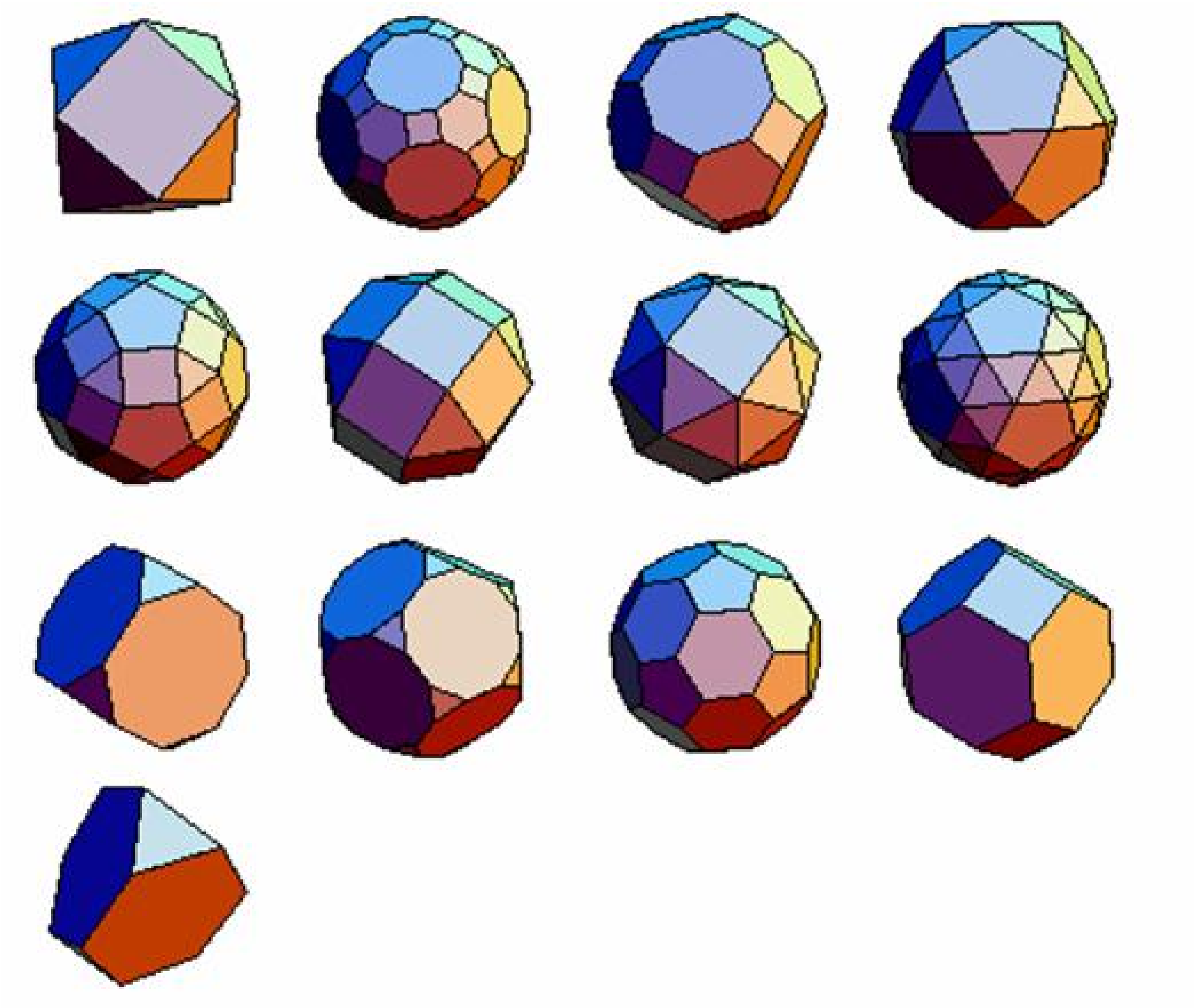
Im Wesentlichen gibt es nur fünf platonische Körper.

Beweis:



B Archimedische Körper

(= Körper, deren Begrenzungsflächen regelmäßige n-Ecke und deren Raum-Ecken kongruent zueinander sind.)



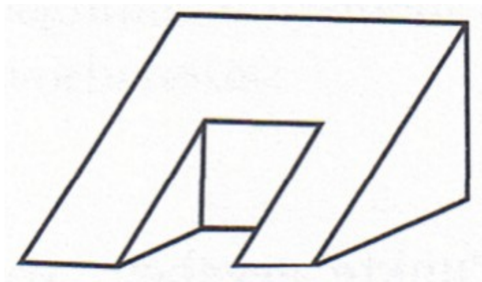
Eulerscher Polyedersatz

Für jedes konvexe Polyeder mit E Ecken, F Flächen und K Kanten gilt:

$$E + F = K + 2$$

Beweis:

Bemerkung: Für nicht-konvexe Polyeder muss der Eulersche Polyedersatz nicht mehr gelten.



Satz von Descartes

Die Summe aller Winkeldefekte eines konvexen Polyeders beträgt stets 720°.

Beweis:

Bemerkung: Der Beweis zeigt, dass aus dem Eulerschen Polyedersatz der Satz von Descartes folgt. Die Beweisführung lässt sich leicht umkehren, sodass aus dem Satz von Descartes der Eulersche Polyedersatz folgt. Die Gleichwertigkeit beider Sätze setzt aber voraus, dass es sich um Polyeder handelt, für deren Seitenflächen die Formel (*) gilt, also z.B. für Polyeder mit lauter konvexen Seitenflächen, insbesondere für konvexe Polyeder.
Bei konkaven Polyedern kann man kaum noch Aussagen treffen. Für viele konkave Polyeder gelten beide Sätze weiterhin, bei anderen wiederum sind beide falsch. Zudem gibt es Polyeder, für die der Satz von Descartes zutrifft, aber der Satz von Euler falsch ist. Bsp.: Würfel mit mittig aufgesetztem kleineren Würfel.

Aufgaben zum Eulerschen Polyedersatz

1. In jeder Ecke eines konvexen Polyeders enden genau vier Kanten.
   Zeige: Mindestens acht Seitenflächen dieses Polyeders sind Dreiecke.

2. Gibt es ein konvexes Polyeder mit genau 7 Kanten?

3. *(BWM 1999, 1. Runde, 4. Aufgabe)*
   Es gibt konvexe Polyeder mit mehr Seitenflächen als Ecken. Was ist die kleinste Anzahl von dreieckigen Seitenflächen, die ein solches Polyeder haben kann? (Beweis!)
   Begriffserklärung: Ein Körper heißt konvex, wenn er zusammen mit je zweien seiner Punkte auch alle Punkte ihrer Verbindungsstrecke enthält.

4. *(entnommen aus Mathe ist cool, Cornelsen-Verlag 2001, S. 114ff)*
   Im Folgenden sei stets ein konvexes Polyeder mit E Ecken, K Kanten und F Seitenflächen vorgelegt.
   Ferner bezeichne

   $E_3, E_4, E_5, \ldots$ die Anzahl der Ecken, von denen $3, 4, 5, \ldots$ Kanten ausgehen,

   $F_3, F_4, F_5, \ldots$ die Anzahl der Seitenflächen mit $3, 4, 5, \ldots$ Ecken.

   Zeige:

   (a) Die Summe der Innenwinkel aller Seitenflächen ist doppelt so groß wie die Summe der Innenwinkel eines ebenen E-Ecks.

   (b) $2K = 3E_3 + 4E_4 + 5E_5 + \ldots nE_n$

   (c) $2K = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots nF_n$

   (d) $E_3 + F_3 \geq 8$

   (e) Es gibt mindestens eine Fläche mit weniger als sechs Seiten.

   (f) $3F \geq K + 6$

   (g) $3E \geq K + 6$

   (h) Das Polyeder bestehe ausschließlich aus 5-, 6- und 7-Ecken (Von jeder Ecke gehen dann genau 3 Kanten aus!)
   Zeige: $F_5 - 12 = F_7$

5. Zeige: Es ist nicht möglich ein konvexes Polyeder ausschließlich mit 15 Dreiecksflächen zu bauen.

6. *(BWM 1983, 1. Runde, 1. Aufgabe)*
   Die Oberfläche eines Fußballs setzt sich aus schwarzen Fünfecken und weißen Sechsecken zusammen. An die Seiten eines jeden Fünfecks grenzen lauter Sechsecke, während an die Seiten eines jeden Sechsecks abwechselnd Fünfecke und Sechsecke

grenzen.

Man bestimme aus diesen Angaben über den Fußball die Anzahl seiner Fünfecke und seiner Sechsecke.

7. *Eulerscher Polyedersatz, ebene Version*

Auf einer Kreislinie liegen 100 Punkte. Jeder wird mit jedem durch eine Strecke verbunden. Dadurch wird die Kreisscheibe in N Gebiete zerlegt.

Wie groß ist N, wenn jeder Punkt des Kreisinneren von höchstens zwei Verbindungsgeraden getroffen wird?